



التمرين الأول: (05 ن)

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(P) معرف بالمعادلة الديكارتية حيث $x+2y+2z+2=0$

(S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء والتي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$

1- بين ان (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r .

2- $B(3; 2; 0)$ نقطة من الفضاء .

- تحقق ان B تنتمي الى (S).

- اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) المماس ل (S) في النقطة B .

3- بين ان (P) و (Q) متعامدان

4- (D) المستقيم المار من $C(1; 1; 1)$ والموازي للمستويين (P) و (Q).

- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

- احسب البعد بين النقطة Ω والمستقيم (D).

بين ان (D) يقطع (S) في نقطتين. (تحديدهما غير مطلوب)

التمرين الثاني: (06 ن)

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

|| من اجل كل عدد مركب z نضع: $p(z) = z^3 + (2\sqrt{2} - 4)z^2 + (8 - 8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$

1- احسب $p(-2\sqrt{2})$.

2- بين ان $p(z) = (z + 2\sqrt{2})(z^2 + az + b)$ حيث $a; b$ عدنان حقيقيان يطلب تحديدهما.

3- حل في \mathbb{C} مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $p(z) = 0$.

|| نضع النقط $A; B; C$ التي لواحقها على الترتيب $Z_A = 2 + 2i$ و $Z_B = 2 - 2i$ و $Z_C = -2\sqrt{2}i$

1- علم النقط $A; B; C$.

2- احسب طويلة لواحق النقط $A; B; C$ ثم بين انها تنتمي الى نفس الدائرة (Γ) يطلب تحديد عناصرها المميزة

3- احسب عمدة العدد المركب Z_A و عمدة العدد المركب Z_B . ثم اثبت ان $(\vec{OB}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{2}$

4- عين z_D لاحقة النقطة D حيث O منتصف $[BD]$

5- بين ان $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ثم فسر النتيجة

6- لتكن (E') مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث: $z = 2\sqrt{2}e^{i\theta}$.

(أ) تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المجموعة (E').

(ب) عين طبيعة المجموعة (E') ثم أنشئها.

التمرين الثالث: (09 ن)

(I) دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل : $g(x) = 1 - x^2 - \ln(x)$

وليكن (C_g) منحناها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1). احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(2). أدرس تغيرات الدالة g .

(3). احسب $g(1)$ واستنتج إشارة g على $]0, +\infty[$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل : $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2$

وليكن (C_f) منحناها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1). احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا

(2). بين أنه مهما يكن $x \in]0, +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3). (أ) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته : $y = -x + 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$
(ب) ادرس الوضع النسبي بين (D) و (C_f)

(4). (أ) بين أنه توجد نقطة وحيدة B يكون عندها المماس للمنحني (C_f) موازيا لـ (D) يطلب تعيين إحداثيتها.

(ب) بين ان معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة هي $y = -x + \frac{1}{e} + 2$. B

(5). بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_1 على المجال $](0, 4); (0, 5)[$ و تقبل حلا وحيدا α_2 على المجال $](2, 2); (2, 5)[$ ما ذا تستنتج بيانيا؟

(6). أنشئ المنحني (C_f) والمستقيمان (D) و (Δ)

(7). ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(m-2)x = \ln x$



التمرين الأول:

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(P) معرف بالمعادلة الديكارية حيث

$$(P): x+2y+2z+2=0$$

(S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء والتي تحقق

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0:$$

1- اثبات ان (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r .

لدينا $a=-2; b=-2; c=-4; d=-3$ ومنه

$$x_{\Omega} = -\frac{a}{2} = 1; y_{\Omega} = -\frac{b}{2} = 1; z_{\Omega} = -\frac{c}{2} = 2$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + d = 9 \text{ ومنه } \Omega(1;1;2) \text{ و } r=3$$

2- نقطة $B(3;2;0)$ من الفضاء .

$$(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$$

- التحقق ان B تنتمي الى (S) لدينا

$$(3-1)^2 + (2-1)^2 + (0-1)^2 = 3 \text{ محقق}$$

اي $B \in (S)$

- المعادلة الديكارية للمستوي (Q) المماس ل (S) في

النقطة B . شعاعه الناظمي $\vec{\Omega B}(2,1,-2)$

ومنه $B \in (Q)$ يعني ان $d = -8$ أي

$$(Q): 2x+y-2z-8=0$$

3- اثبات ان (P) و (Q) متعامدان

$$\vec{n}_{(P)}(1;2;2) \text{ و } \vec{\Omega B}(2,1,-2) \text{ ومنه}$$

$$(P) \vec{\Omega B} \cdot \vec{n}_{(P)} = 2+2-4=0 \text{ و } (Q) \text{ متعامدان}$$

4- (D) المستقيم المار من $C(1;1;1)$ والموازي للمستويين

(P) و (Q).

- تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D). شعاع توجيهه

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{\Omega B} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \end{cases} \text{ يحقق } \vec{u}(a,b,c)$$

ومنه نحل الجملة $\begin{cases} 2a+b-2c=0 \\ a+2b+2c=0 \end{cases}$ نأخذ c ثابت نجد

$$a = -b \text{ و } b = -2c \text{ اذن } \vec{u}(2,-2,1)$$

$$(D): \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t+1 \\ z=t+1 \end{cases} \text{ اذن } t \in \mathbb{R}$$

البعد بين النقطة Ω والمستقيم (D). وبوضع النقطة H

مسطها العمودي نجد $\vec{\Omega H}(2t;-2t;t-1)$

$$\vec{\Omega H} \cdot \vec{u} = 0; 4t+4t+t-1=0; \left(t = \frac{1}{7}\right) \text{ ومنه}$$

$$\Omega H = \frac{\sqrt{44}}{7} \text{ ومنه } \vec{\Omega H} \left(\frac{2}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}\right)$$

اثبات ان (D) يقطع (S) في نقطتين $r=3$ و

$$\Omega H = \frac{\sqrt{44}}{7} \approx 1 \text{ اذن } \Omega H < r \text{ يعني ان (D) يقطع (S)}$$

في نقطتين .

التمرين الثاني:

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$$(O, \vec{i}, \vec{j})$$

من اجل كل عدد مركب z نضع :

$$p(z) = z^3 + (2\sqrt{2}-4)z^2 + (8-8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$$

1- حساب $p(-2\sqrt{2})$.

$$p(-2\sqrt{2}) = (-2\sqrt{2})^3 + (2\sqrt{2}-4)(-2\sqrt{2})^2$$

$$+ (8-8\sqrt{2})(-2\sqrt{2}) + 16\sqrt{2}$$

$$p(-2\sqrt{2}) = -16\sqrt{2} + 16\sqrt{2} - 32$$

$$-16\sqrt{2} + 32 + 16\sqrt{2} = 0$$

2- اثبات ان $p(z) = (z+2\sqrt{2})(z^2+az+b)$ حيث $a; b$

اعدادان حقيقيان يطلب تحديدهما.

$$p(z) = z^3 + az^2 + bz + 2\sqrt{2}z^2 + 2\sqrt{2}az + b2\sqrt{2}$$

$$p(z) = z^3 + z^2(a+2\sqrt{2}) + z(b+2\sqrt{2}a) + b2\sqrt{2}$$

$$\text{بالمطابقة نجد } a = -4; b = 8$$

$$\text{ومنه } p(z) = (z+2\sqrt{2})(z^2-4z+8)$$

3- حل في \mathbb{C} مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $p(z) = 0$.

$$\text{أي ان } (z+2\sqrt{2})(z^2-4z+8) = 0 \text{ ومنه } z = -2\sqrt{2} \text{ و}$$

$$Z = 2-2i \text{ و } Z = 2+2i \text{ أي } z^2-4z+8$$

/// نضع النقط $C; B; A$ التي لواحقها على الترتيب

$$Z_C = -2\sqrt{2}i \text{ و } Z_B = 2-2i, Z_A = 2+2i$$

1- تعليم النقط $A; B; C$.



التمرين الثالث:

(I) دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على المجال $]0, +\infty[$

$$g(x) = 1 - x^2 - \ln(x) \text{ بالشكل}$$

و ليكن (C_g) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم

$$\text{متعامد ومتجانس } (\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$$

(1) تغيرات الدالة g . نعلم ان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^2} = +\infty$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - x^2 - \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x^2 - \ln(x) = -\infty$$

المشتقة: دالة تقبل الاشتقاق ودالتها المشتقة

$$g'(x) = (1 - x^2 - \ln(x))' = -2x - \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 - 1}{x}$$

إشارة المشتقة $g'(x) = 0$ يعني ان $-2x^2 - 1 = 0$ ومنه $g'(x) < 0$

جدول التغيرات $g(1) = 0$

x	0	1	$+\infty$
$-2x^2 - 1$		-	
x		+	
$g'(x)$		-	
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

و $g(x) > 0$ الدالة $x \in]0; 1[$ و $g(x) < 0$ فان $x \in]1; +\infty[$

(II) نعتبر الدالة f معرفة $]0, +\infty[$ بالشكل: $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2$

(أ) النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} - x + 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - x + 2 = -\infty$$

(1) بين أنه مهما يكن $x \in]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم

استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

الدالة f تقبل الاشتقاق

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} - x + 2 \right)'$$

$$= -1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

إشارة المشتق: $f'(x)$ يعني ان $g(x) = 0$ ومنه $x = 1$

لدينا $f(1) = 1$

-2 حساب طويلة لواحظ النقط $C; B; A$ لدينا

$$|Z_B| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2} \text{ و } |Z_A| = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$$

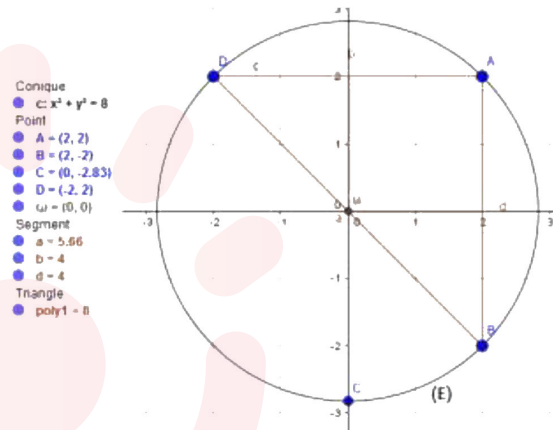
$$|Z_C| = |-2\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$$

نستنتج ان النقط $C; B; A$ تنتمي الى نفس الدائرة (Γ) ذات

المركز O ونصف قطرها $r = 2\sqrt{2}$

-3 عمدة العدد المركب Z_A :

$$\arg(Z_A) \begin{cases} \cos \theta = \sqrt{2}/2 \\ \sin \theta = \sqrt{2}/2 \end{cases} \theta = \frac{\pi}{4}$$



و عمدة العدد المركب Z_B :

$$\arg(Z_B) \begin{cases} \cos \theta = \sqrt{2}/2 \\ \sin \theta = -\sqrt{2}/2 \end{cases} \theta = -\frac{\pi}{4}$$

اثبات ان

$$(\vec{OB}; \vec{OA}) = (\vec{OI}; \vec{OA}) - (\vec{OI}; \vec{OB}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

-4 عين z_D لاحقة النقطة D حيث O منتصف $[BD]$

$$\text{لدينا } \frac{z_D + z_B}{2} = 0 \text{ ومنه } z_D = -2 + 2i$$

-5 اثبات ان $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = e^{i\pi/2}$ ومنه

$$\text{العدد تخيلي } \frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = \frac{2 - 2i - 2 - 2i}{-2 + 2i - 2 - 2i} = i = e^{i\pi/2}$$

صرف موجب

تفسير النتيجة المثلث ABD قائم في A ومتساوي الساقين

-6 لتكن (E') مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث

$$z = 2\sqrt{2}e^{i\theta} \text{ . .}$$

(أ) التحقق أن النقطة D تنتمي إلى المجموعة (E') .

وبما ان $z_D = 2\sqrt{2}e^{i\theta}$ يعني ان $-2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\theta}$

$$D \in (E') \text{ فان } |z_D| = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$$

(ب) المجموعة (E') هي دائرة مركزها O ونصف

قطرها $2\sqrt{2}$ ثم أنشئها.

وبما ان $f(2,2) \times f(2,5) \leq 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة
المعادلة $f(\alpha_2) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال
 $\alpha_2 \in](2,2);(2,5)[$

نستنتج بيانيا ان المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في
النقطة ذات الفاصلة α_2 و α_1

(4.1) النقطة الوحيدة B يكون عندها المماس للمنحنى (C_f)

موازيا لـ (D) أي $f'(x) = -1$ ومنه $f'(x) + 1 = 0$ ومنه

$$x = e \text{ ومنه } 1 - \ln x = 0$$

(ب) معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة B هي :

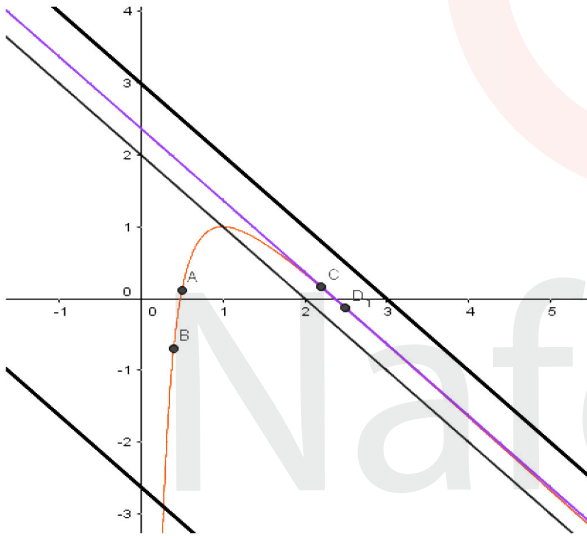
$$y = -(x - e) + f(e)$$

$$\text{لان } f(e) = \frac{1}{e} - e + 2 = \frac{1 - e^2 + 2e}{e} \text{ ومنه}$$

$$y = -x + \frac{1}{e} + 2 \text{ أي } y = -x + e + \frac{1 - e^2 + 2e}{e}$$

(5.4) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيمان (D) و (Δ)

(6.4) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد



حلول المعادلة : $(m-2)x = \ln x$

$$\text{ومنه } f(x) = -x + m \text{ و } -x + m = \frac{\ln x}{x} - x + 2$$

$$m \in]-\infty; \frac{1}{e} + 2[\text{ تقبل حل وحيد}$$

$$m \in]\frac{1}{e} + 2; +\infty[\text{ لا تقبل حلول}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	--
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

(2.1) اثبات أن المستقيم (D) الذي معادلته : $y = -x + 2$

هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

(ب) ادرس الوضع النسبي بين (D) و (C_f) لدينا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - x + 2 + x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

ومنه $y = -x + 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى

(ب) وضعية "المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

$$[f(x) - y] = \frac{\ln x}{x} \text{ ومنه } \ln x = 0 \text{ أي ان } x = 1$$

$x \in]0; 1[$ المنحنى (C_f) فوق (D) ولما $x \in]1; +\infty[$ المنحنى

(C_f) تحت (D)

(3.3) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال

$](0,4);(0,5)[$ بما ان الدالة f متزايدة على المجال

$]0; 1[$ ومستمرة فهي رتيبة و متزايدة ومستمرة على المجال

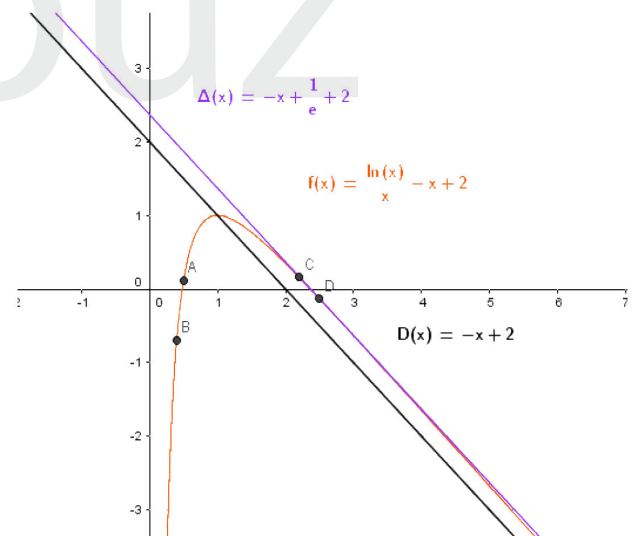
$](0,4);(0,5)[$ فهي رتيبة

وبما ان $f(0,4) = -0,69$ و $f(0,5) \approx 0,11$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة

$f(\alpha_1) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال

$$\alpha_1 \in](0,4);(0,5)[$$



بما ان الدالة f متناقصة ومستمرة على المجال $]1; +\infty[$ فهي

رتيبة فهي متناقصة ومستمرة على المجال $](2,2);(2,5)[$

وهي رتيبة وبما ان $f(2,2) = 0,11$ و $f(2,5) \approx -0,13$